NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Recuerde que debe realizar su prueba en su respectiva sección, de lo contrario será calificad@ con nota mínima.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables y formularios
- Apagar y guardar sus **celulares**.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración**= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

UTALCA

IMAFI

1) **[20 ptos.]**

a) Sea $a_k = a_{k-1} + k$ con $a_0 = 0$ y $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

i) Encuentre una expresión para el término genérico a_j.

ii) Utilizando *i*) pruebe que: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{n}{6}(n+1)(n+2)$

b) Sobre un segmento L de longitud 1 se realiza la siguiente secuencia de operaciones:

Paso 1: Dividimos el segmento L en 3 partes iguales y se quita su tercio del medio. Nos quedan así 2 intervalos más pequeños: L_{11} y L_{12}.

Paso 2: Ahora, a cada uno de los intervalos que quedan, L_{11} y L_{12}, se les realiza la misma operación, es decir, cada uno de ellos se divide en 3 partes iguales y se les quita el tercio del medio. Nos quedan así 4 intervalos más pequeños. Y así sucesivamente.

La siguiente figura ilustra los 4 primeros pasos de la secuencia recién señalada.

Calcular la suma de las longitudes de TODOS los segmentos que se quitan del segmento L.

2) **[20 ptos.]** Demostrar utilizando inducción matemática para todo que $n \in \mathbb{N}$

$$(n+4)^2 < 2^{n+4}$$

Ayuda: $(k+4)^2 > 3(k+4), \ \forall \ k \geq 1$

3) [**20 ptos.**] Considere los siguientes números complejos:

$$z = 1 + \sqrt{3} \cdot i \qquad \text{y} \qquad u = \sqrt{3} + i$$

Calcular

a) $w = \dfrac{z^{10}}{u^9}$

b) las raíces cuadradas de complejo $s = w \cdot i$, es decir $s^2 = w \cdot i$.

Pauta:

1) *a)* *i)* Observe que $a_k - a_{k-1} = k$. Aplicando sumatoria a esta igualdad y recordando que $a_0 = 0$, se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \sum_{j=1}^{n} k \Longleftrightarrow a_j - a_0 = \frac{j}{2}(j+1) \Longrightarrow a_j = \frac{j}{2}(j+1)$$

5 puntos

ii) Aplicando sumatoria a la igualdad $a_j = \frac{j}{2}(j+1)$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2}(j+1) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}(n+1) = \frac{n}{6}(n+1)(n+2)$$

5 puntos

b) Completando la siguiente tabla:

Paso	Nro de segmentos sacados	long. de cada segmento	long. total
1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	2	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{2}{3^2}$
3	2^2	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{2^2}{3^3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	2^{n-1}	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{2^{n-1}}{3^n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\Uparrow\Uparrow\Uparrow$

Luego, la suma de las longitudes de TODOS los segmentos que se quitan del segmento L, es:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots + = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

5 puntos

que es una serie geométrica, con primer término $\frac{1}{3}$ y razón $\frac{2}{3}$. Por lo tanto: **3 puntos**

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

2 puntos

Respuesta: La suma de TODOS los segmentos se que quitan es igual a 1.

2) Sea

$$P(n): \quad (n+4)^2 < 2^{n+4}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

a) $\boxed{\mathbf{n=1}}$ $P(1): 5^2 = 15 < 2^5 = 32$. Por lo tanto $P(1)$ es verdadera. **1 punto**

b) $\boxed{\mathbf{n=k}}$ Supongamos que $P(k)$ es verdadera , es decir

$$P(k): \quad (k+4)^2 < 2^{k+4}, \quad \text{(Hip. Ind)}$$

1 punto

c) $\boxed{\mathbf{n=k+1}}$ Por demostrar que

$$P(k+1): \quad ((k+1)+4)^2 < 2^{(k+1)+4}, \quad \text{es verdadera}$$

2 puntos

<u>**demostración**</u>:

$$\begin{aligned}
((k+1)+4)^2 &= ((k+4)+1)^2 \\
&= (k+4)^2 + 2(k+4) + 1 \\
&\overset{(1)}{<} 2^{k+4} + 2(k+4) + 1 \\
&\overset{(2)}{<} 2^{k+4} + 2(k+4) + (k+4), \quad \text{pues} \quad k+4 > 1, \forall\, k \geq 1 \\
&= 2^{k+4} + 3(k+4) \\
&\overset{(3)}{<} 2^{k+4} + (k+4)^2, \quad \text{pues} \quad (k+4)^2 > 3(k+4), \forall\, k \geq 1 \\
&< 2^{k+4} + 2^{k+4} \\
&\overset{(4)}{=} 2^{k+5}
\end{aligned}$$

(1) $\Longrightarrow$ 2 puntos
(2) $\Longrightarrow$ 4 puntos
(3) $\Longrightarrow$ 5 puntos
(4) $\Longrightarrow$ 5 puntos

Por lo tanto, $P(k+1)$ es verdadera.

Por lo tanto, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

3) *a*)

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{(1+i\sqrt{3})^{10}}{(\sqrt{3}+i)^9} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{2^{10}\cdot(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3})}{2^9\cdot(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6})} \\
&\overset{(2)}{=} \frac{2^{10}\cdot(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)}{2^9(0-i)} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{-1-i\sqrt{3}}{-i} \\
&\overset{(4)}{=} \frac{1+i\sqrt{3}}{i}\cdot\frac{-i}{-i} \\
&\overset{(5)}{=} \frac{(\sqrt{3}-i)}{1} \\
&= \sqrt{3}-i
\end{aligned}
$$

(1) $\Longrightarrow$ 3 puntos
(2) $\Longrightarrow$ 2 puntos
(3) $\Longrightarrow$ 2 puntos
(4) y (5) $\Longrightarrow$ 3 puntos

b) Considerar $s = iw$, tenemos que $s = iw = 1 + i\sqrt{3}$

$$|s| = 2 \qquad \text{y} \qquad Arg(s) = \frac{\pi}{3}$$

4 puntos

Luego, las raices cuadradas de s son:

$$
\begin{aligned}
s_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/3}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi/3}{2}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i
\end{aligned}
$$

3 puntos

$$
\begin{aligned}
s_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/3+2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi/3+2\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i
\end{aligned}
$$

3 puntos

UTALCA

IMAFI